2014 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初賽 個人賽試題

________縣市________國民中學____年級　編號：________　姓名：_________

作答時間: 二 小 時　　　　　　　　　　　　　　　　性別:□男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；答案若為分數，請化為最簡分數)

1. 某一個班級 20 位男生的平均體重為 62 Kg，而該班 15 位女生的平均體重為 55 Kg，則這個班級 35 位學生的平均體重為__________Kg。

【參考解法】

可知男生的總重量為$62\times 20=1240$ Kg、女生的總重量為$55\times 15=825$ Kg，因此這35位學生的總重量為$1240+825=2065$ Kg，所以平均體重為$\dfrac{2065}{35}=59$ Kg。

答：59 Kg

2. 設 $B=103^2-102^2+101^2-100^2+\cdots+3^2-2^2+1^2$，則 B 的最大質因數為__________。

【參考解法】

$$\begin{aligned}B&=103^2-102^2+101^2-100^2+\cdots+3^2-2^2+1^2\\&=(103+102)(103-102)+(101+100)(101-100)+\cdots(3+2)(3-2)+1\\&=103+102+101+100+\cdots+3+2+1\\&=\frac{103\times(103+1)}{2}\\&=2^2\times 13\times 103\end{aligned}$$

故知B的最大質因數為103。

答：103

3. 設 $A=2^{2014}-1$，則 A 的末二位數碼為__________。

【參考解法】

觀察可知從$2^2=4$開始，2的冪次的末二碼為04、08、16、32、64、28、56、12、24、48、96、92、84、68、36、72、44、88、76、52這20個數為循環週期依序重複出現。因 $2014-1=2013=20\times 100+13$，故知$2^{2014}$的末二位數碼為第13個數84，因此$A=2^{2014}-1$的末二位數碼為83。

答：83

4. 設 P 為正整數，已知 P 被 3 除時所得的餘數為 1；被 5 除時所得的餘數為 3；被 7 除時所得的餘數為 5，則 P 的最小值為__________。

【參考解法】
可知 $P+2$ 為3、5、7的公倍數，故 $P+2$ 的最小值為105，即P的最小值為103。

答：103

5. 設 a、b 均為正整數，已知 $2ax^2+3bx+1=0$ 有相異的實數根且二根的絕對值均小於 1，則 $2a+3b$ 的最小值為 __________。

【參考解法】
因 $2ax^2+3bx+1=0$ 有相異的實數根，故可知判別式 $9b^2-8a>0$，即 $9b^2>8a$；
因要求出 $2a+3b$ 的最小值，故從a、b均愈小愈好：

(i) $b=1$時，$a=1$：此時方程為 $2x^2+3x+1=0$，兩根為 $-\frac{1}{2}$、-1，故不合；

(ii) $b=2$時，$a=1$、2、3或4：

(1) 若 $a=1$，則此時方程為 $2x^2+6x+1=0$，兩根為 $\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$，故不合；

(2) 若 $a=2$，則此時方程為 $4x^2+6x+1=0$，兩根為 $\frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}$，故不合；

(3) 若 $a=3$，則此時方程為 $6x^2+6x+1=0$，兩根為 $\frac{-3\pm\sqrt{3}}{6}$，其絕對值均小於1，滿足題意，此時 $2a+3b=12$；

此時可判斷出 $b\le 3$，故需再觀察 $b=3$ 的情形。

(iii) $b=3$時，若 $2a+3b=2a+9<12$，則 $a=1$：此時方程為 $2x^2+9x+1=0$，兩根為 $\frac{-9\pm\sqrt{73}}{4}$，故不合。

因此可得知 $2a+3b$ 的最小值為12。

答：12

6. 若 x_1、x_2、x_3、x_4 為互不相等的正奇數，且滿足

$$(103-x_1)(103-x_2)(103-x_3)(103-x_4)=24^2，$$

則 $x_1+x_2+x_3+x_4=$__________。

【參考解法】
不妨令 $x_1>x_2>x_3>x_4$ 因 $24^2=2^6\times3^2$，故可知 $103-x_1$、$103-x_2$、$103-x_3$、$103-x_4$ 這四個數的質因數分解式中僅有質因數2與3；再因 $103-x_1$、$103-x_2$、$103-x_3$、$103-x_4$ 為四個相異的偶數，因此這四個數的質因數分解式中都有質因數2。現可判斷知接下來為將2個2及2個3分配給這四個數使其為相異偶數。
可知 $103-x_1$、$103-x_2$、$103-x_3$、$103-x_4$ 這四個數可取
$(2, 4, 6, 12)$、$(-12, -6, -4, -2)$、$(-12, -6, 2, 4)$、$(-12, -4, 2, 6)$、
$(-12, -2, 4, 6)$、$(-6, -4, 2, 12)$、$(-6, -2, 4, 12)$、$(-4, -2, 6, 12)$、
$(-12, -2, 2, 12)$、$(-6, -4, 4, 6)$、$(-6, -2, 2, 24)$、$(-24, -2, 2, 6)$、
$(-4, -2, 2, 36)$、$(-36, -2, 2, 4)$、$(-8, -2, 2, 18)$、$(-18, -2, 2, 8)$、

$(-8,-6,2,6)$、$(-6,-2,6,8)$、$(-4,-2,4,18)$、$(-18,-4,2,4)$。

因此可知有以下情況：

(1) $103-x_1=2$、$103-x_2=4$、$103-x_3=6$、$103-x_4=12$，即
$x_1=103-2=101$、$x_2=103-4=99$、$x_3=103-6=97$、$x_4=103-12=91$，
所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=101+99+97+91=388$；

(2) $103-x_1=-12$、$103-x_2=-6$、$103-x_3=-4$、$103-x_4=-2$，即
$x_1=103+12=115$、$x_2=103+6=109$、$x_3=103+4=107$、$x_4=103+2=105$，
所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=115+109+107+105=436$；

(3) $103-x_1=-12$、$103-x_2=-6$、$103-x_3=2$、$103-x_4=4$，即
$x_1=103+12=115$、$x_2=103+6=109$、$x_3=103-2=101$、$x_4=103-4=99$，
所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=115+109+101+99=424$；

(4) $103-x_1=-12$、$103-x_2=-4$、$103-x_3=2$、$103-x_4=6$，即
$x_1=103+12=115$、$x_2=103+4=107$、$x_3=103-2=101$、$x_4=103-6=97$，
所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=115+107+101+97=420$；

(5) $103-x_1=-12$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=4$、$103-x_4=6$，即
$x_1=103+12=115$、$x_2=103+2=105$、$x_3=103-4=99$、$x_4=103-6=97$，
所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=115+105+99+97=416$；

(6) $103-x_1=-6$、$103-x_2=-4$、$103-x_3=2$、$103-x_4=12$，即
$x_1=103+6=109$、$x_2=103+4=107$、$x_3=103-2=101$、$x_4=103-12=91$，
所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=109+107+101+91=408$；

(7) $103-x_1=-6$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=4$、$103-x_4=12$，即
$x_1=103+6=109$、$x_2=103+2=105$、$x_3=103-4=99$、$x_4=103-12=91$，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=109+105+99+91=404$；

(8) $103-x_1=-4$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=6$、$103-x_4=12$，即
$x_1=103+4=107$、$x_2=103+2=105$、$x_3=103-6=97$、$x_4=103-12=91$，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=107+105+97+91=400$。

(9) $103-x_1=-12$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=2$、$103-x_4=12$，即
$x_1=103+12=115$、$x_2=103+2=105$、$x_3=103-2=101$、$x_4=103-12=91$，
所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=115+105+101+91=412$。

(10) $103-x_1=-6$、$103-x_2=-4$、$103-x_3=4$、$103-x_4=6$，即
$x_1=103+6=109$、$x_2=103+4=107$、$x_3=103-4=99$、$x_4=103-6=97$，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=109+107+99+97=412$。

(11) $103-x_1=-6$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=2$、$103-x_4=24$，即
$x_1=103+6=109$、$x_2=103+2=105$、$x_3=103-2=101$、
$x_4=103-24=79$，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=109+105+101+79=394$；

(12) $103-x_1=-24$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=2$、$103-x_4=6$，即
$x_1=103+24=127$、$x_2=103+2=105$、$x_3=103-2=101$、$x_4=103-6=97$，

所以$x_1+x_2+x_3+x_4=127+105+101+97=430$；

(13) $103-x_1=-4$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=2$、$103-x_4=36$，即
$x_1=103+4=107$、$x_2=103+2=105$、$x_3=103-2=101$、$x_4=103-36=67$，
所以$x_1+x_2+x_3+x_4=107+105+101+67=380$；

(14) $103-x_1=-36$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=2$、$103-x_4=4$，即
$x_1=103+36=139$、$x_2=103+2=105$、$x_3=103-2=101$、$x_4=103-4=99$，
所以$x_1+x_2+x_3+x_4=139+105+101+99=444$；

(15) $103-x_1=-8$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=2$、$103-x_4=18$，即
$x_1=103+8=111$、$x_2=103+2=105$、$x_3=103-2=101$、
$x_4=103-18=85$，所以$x_1+x_2+x_3+x_4=111+105+101+85=402$；

(16) $103-x_1=-18$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=2$、$103-x_4=8$，即
$x_1=103+18=121$、$x_2=103+2=105$、$x_3=103-2=101$、$x_4=103-8=95$，
所以$x_1+x_2+x_3+x_4=121+105+101+95=422$；

(17) $103-x_1=-8$、$103-x_2=-6$、$103-x_3=2$、$103-x_4=6$，即$x_1=103+8=111$、
$x_2=103+6=109$、$x_3=103-2=101$、$x_4=103-6=97$，所以
$x_1+x_2+x_3+x_4=111+109+101+97=418$；

(18) $103-x_1=-6$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=6$、$103-x_4=8$，即$x_1=103+6=109$、
$x_2=103+2=105$、$x_3=103-6=97$、$x_4=103-8=95$，所以
$x_1+x_2+x_3+x_4=109+105+97+95=406$。

(19) $103-x_1=-4$、$103-x_2=-2$、$103-x_3=4$、$103-x_4=18$，即
$x_1=103+4=107$、$x_2=103+2=105$、$x_3=103-4=99$、$x_4=103-18=85$，所以$x_1+x_2+x_3+x_4=107+105+99+85=396$。

(20) $103-x_1=-18$、$103-x_2=-4$、$103-x_3=2$、$103-x_4=4$，即
$x_1=103+18=121$、$x_2=103+4=107$、$x_3=103-2=101$、$x_4=103-4=99$，
所以$x_1+x_2+x_3+x_4=121+107+101+99=428$。

故知共有十九解：380、388、394、396、400、402、404、406、408、412、416、418、420、422、424、428、430、436、444。

答：380、388、394、396、400、402、404、406、408、412、416、418、420、422、424、428、430、436、444 (答對任何一解均給分)

7. 設α、β是方程$x^2-x-1=0$的二根，若$\alpha^{2013}-\beta^{2013}=t$且$\alpha^{2011}-\beta^{2011}=s$，則以$s$與$t$表示$\alpha^{2014}-\beta^{2014}$之值為________。

【參考解法1】

可知$\alpha^2=\alpha+1$、$\beta^2=\beta+1$，因此

$$\begin{aligned}\alpha^{2013}-\beta^{2013}&=\alpha^2\bullet\alpha^{2011}-\beta^2\bullet\beta^{2011}\\&=(\alpha+1)\bullet\alpha^{2011}-(\beta+1)\bullet\beta^{2011}\\&=(\alpha^{2012}-\beta^{2012})+(\alpha^{2011}-\beta^{2011})\end{aligned}$$

故可推知$\alpha^{2012}-\beta^{2012}=(\alpha^{2013}-\beta^{2013})-(\alpha^{2011}-\beta^{2011})=t-s$，因此

$$\begin{aligned}\alpha^{2014}-\beta^{2014}&=\alpha^{2}\bullet\alpha^{2012}-\beta^{2}\bullet\beta^{2012}\\&=(\alpha+1)\bullet\alpha^{2012}-(\beta+1)\bullet\beta^{2012}\\&=(\alpha^{2013}-\beta^{2013})+(\alpha^{2012}-\beta^{2012})\\&=t+(t-s)\\&=2t-s\end{aligned}$$

【參考解法2】

觀察可得：

$$\begin{aligned}\alpha^{1}&=\alpha\\\alpha^{2}&=\alpha+1\\\alpha^{3}&=\alpha\bullet\alpha^{2}=\alpha^{2}+\alpha=2\alpha+1\\\alpha^{4}&=\alpha\bullet\alpha^{3}=2\alpha^{2}+\alpha=3\alpha+2\\\alpha^{5}&=\alpha\bullet\alpha^{4}=3\alpha^{2}+2\alpha=5\alpha+3\\&\vdots\end{aligned}$$

其中α^{n}中α項的係數為第n項的費波那契數、常數項為第$n-1$項的費波那契數。現驗證此為事實。假設$n=k$時，$\alpha^{k}=F_{k}\alpha+F_{k-1}$成立，則當$n=k+1$時，$\alpha^{k+1}=\alpha\bullet\alpha^{k}=F_{k}\alpha^{2}+F_{k-1}\alpha=F_{k}(\alpha+1)+F_{k-1}\alpha=(F_{k}+F_{k-1})\alpha+F_{k}=F_{k+1}\alpha+F_{k}$。

故由數學歸納法知此為事實，因此知

$$\alpha^{2013}-\beta^{2013}=(F_{2013}\alpha+F_{2012})-(F_{2013}\beta+F_{2012})=F_{2013}(\alpha-\beta)=t$$

$$\alpha^{2011}-\beta^{2011}=(F_{2011}\alpha+F_{2010})-(F_{2011}\beta+F_{2010})=F_{2011}(\alpha-\beta)=s$$

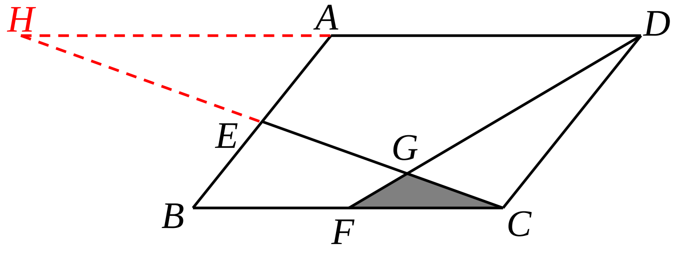
$$\alpha^{2014}-\beta^{2014}=(F_{2014}\alpha+F_{2013})-(F_{2014}\beta+F_{2013})=F_{2014}(\alpha-\beta)=(F_{2013}+F_{2012})(\alpha-\beta)$$

因$F_{2013}=F_{2012}+F_{2011}$，故知$F_{2012}=F_{2013}-F_{2011}$，所以$F_{2013}+F_{2012}=2F_{2013}-F_{2011}$，因此$\alpha^{2014}-\beta^{2014}=(2F_{2013}-F_{2011})(\alpha-\beta)=2t-s$。

答：$2t-s$

8. 在平行四邊形 $ABCD$ 中，點 E、F 分別為 AB、BC 的中點，若 CE 與 DF 相交於點 G，如下圖所示。則三角形 CGF 的面積與四邊形 $ABCD$ 的面積之比為_____：_____。

【參考解法】



分別延長CE、AD，令其延長線交於點H，如圖所示。

因$AE//CD$且$AE：CD=1：2$，故知$HA：HD=1：2$，即$HA=AD$。

再因$HD//FD$，故知$\triangle HGD\sim\triangle CGF$，即有$FG：GD=FC：HD=FC：2AD=1：4$，所以$FG：FD=1：5$，可推得三角形$CGF$的面積與三角形$CDF$的面積之比為$1：5$。因$F$為$BC$中點，故知三角形$CDF$的面積與四邊形$ABCD$的面積之比為$1：4$，此時即可推知三角形$CGF$的面積與四邊形$ABCD$的面積之比為$1：20$。

答：$1：20$

9. 設 n 為正整數，若數列$\{x_n\}$的前 n 項之和 $S_n = n^3$。今造一個新數列$\{y_n\}$，其中 $y_1 = 1$，而對$n \geq 2$的正整數，$y_n = \dfrac{1}{x_n - 1}$。令 $y_{101} + y_{102} + y_{103} + \cdots + y_{2014}$ 之值的最簡分數為$\dfrac{q}{p}$，則 $p - q$之值為__________。

【參考解法】

可知 $x_n = S_n - S_{n-1} = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$，故可得：

$$y_n = \frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

因此有：

$$\begin{aligned} y_{101} + y_{102} + y_{103} + \cdots + y_{2014} &= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{102}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{2014}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1914}{201400} = \frac{319}{100700} \end{aligned}$$

故 $p - q = 100700 - 319 = 100381$。

答：100381

10. 設直角三角形的三邊長 a、b、c 為正整數，其中 $a \geq b \geq c$；若此直角三角形的周長為 30，則 $a^{2012} + b^{2013} + c^{2014}$ 的個位數碼為__________。

【參考解法】

可知 $a = 30 - b - c$ 且 $a^2 = b^2 + c^2$，故有

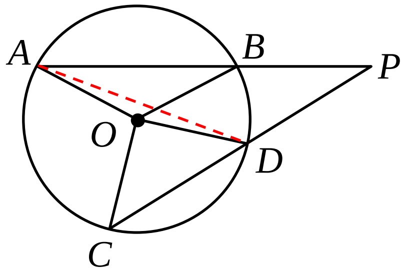
$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= (30 - b - c)^2 \\ b^2 + c^2 &= 900 + b^2 + c^2 - 60b - 60c + 2bc \\ 30b - bc &= 450 - 30c \\ b &= \frac{450 - 30c}{30 - c} = 30 - \frac{450}{30 - c} \end{aligned}$$

因b、c為正整數，故知$30 > \dfrac{450}{30-c}$，即$30 > 30 - c > 15$；再因 $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$，可知450的因數中僅25可介於15與30之間，故知$30 - c = 25$，即$c = 5$，因此 $b = 12$、$a = 13$。

觀察可知，a的冪次的個位數碼是以3、9、7、1這四個數碼為循環週期依序重複出現、b的冪次的個位數碼是以2、4、8、6這四個數碼為循環週期依序重複出現、c的冪次的個位數碼恆為5，再因 $2012 = 4 \times 503$、$2013 = 4 \times 503 + 1$，故知 a^{2012} 的個位數碼為3、9、7、1這循環週期中的第四個數碼，即1，b^{2013} 的個位數碼為2、4、8、6這循環週期中的第一個數碼，即2，c^{2014} 的個位數碼為5，故 $a^{2012} + b^{2013} + c^{2014}$ 的個位數碼為1+2+5=8。

答：8

11. 自圓 O 外一點 P 作割線 PA、PC 分別交圓於點 B、D，如下圖所示。已知 $\angle APC=32°$，則 $\angle AOC-\angle BOD=$________°。



【參考解法】

連接AD，如圖所示。可知

$$\angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOC$$

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD$$

而 $\angle APC=\angle ADC-\angle DAB=\frac{1}{2}(\angle AOC-\angle BOD)$，

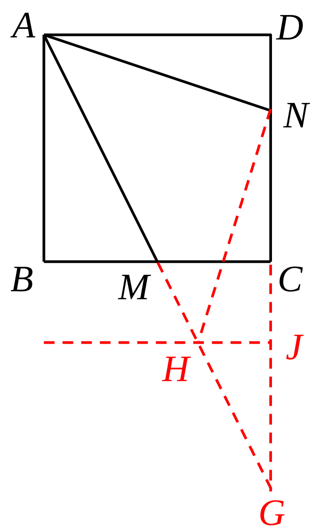
因此知 $\angle AOC-\angle BOD=2\angle APC=2\times 32°=64°$。

答：64°

12. 已知 BC 與 CD 為正方形 $ABCD$ 相鄰的兩個邊，若點 M、N 分別為 BC、CD 邊上的點且滿足 $3DN=AD$ 及 $\angle MAN=45°$，則 $\frac{AM}{AN}=$ __________。

【參考解法 1】

分別延長AM、DC並交於點G，在MG上取一點H使 $NH\perp AN$，過H作$JH//AD$，交CG於J，如圖所示。



因 $\angle MAN=45°$ 且 $NH\perp AN$，故知$\triangle AHN$為等腰直角三角形，因此 $AN=NH$；再因 $\angle ADN=\angle HJN=90°$、$\angle HNJ=90°-\angle DNA=\angle DAN$，

故可得$\triangle NHJ\cong\triangle AND$，因此知 $HJ=DN$。

若令 $DN=1$，則知 $AD=AB=BC=3$ 且 $\frac{JG}{DG}=\frac{JH}{AD}$，即 $\frac{JG}{4+JG}=\frac{1}{3}$，故可得知 $JG=2$，因此 $\frac{MC}{AD}=\frac{CG}{DG}=\frac{1}{2}$，故有 $MC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，即$M$為$BC$中點，所以 $BM=\frac{3}{2}$。

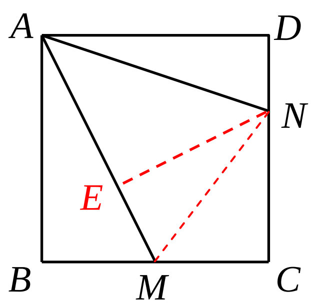
因此可得 $\frac{AM}{AN}=\frac{\sqrt{9+\frac{9}{4}}}{\sqrt{10}}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$。

【參考解法 2】

在AM上取點E使得 $NE\perp AM$，連結NM，如圖所示。

若令 $DN=1$，則知 $AD=AB=BC=3$、

$AN=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$、$NC=2$，接著再由 $\angle MAN=45°$



可推得 $AE=NE=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$ 。

若令 $MC=a$ ，則有 $BM=3-a$ ，再利用勾股定理可得知

$MN=\sqrt{a^2+2^2}=\sqrt{a^2+4}$ 、 $EM=\sqrt{a^2+4-5}=\sqrt{a^2-1}$ ；

現再利用勾股定理可得知 $AB^2+BM^2=AM^2$ ，即有

$$3^2+(3-a)^2=(\sqrt{5}+\sqrt{a^2-1})^2$$
$$9+9-6a+a^2=5+a^2-1+2\sqrt{5}\sqrt{a^2-1}$$
$$7-3a=\sqrt{5}\sqrt{a^2-1}$$
$$49-42a+9a^2=5a^2-5$$
$$2a^2-21a+27=0$$

故知 $a=9$ 或 $a=\dfrac{3}{2}$ 。因 $a=MC<BC=3$，故可得 $a=\dfrac{3}{2}$ ，此時

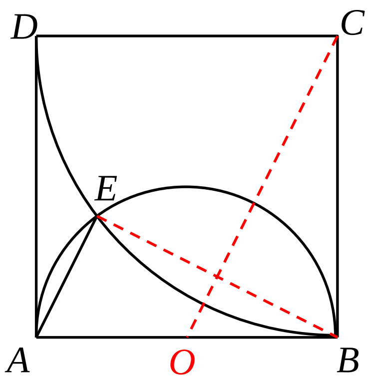
$$\frac{AM}{AN}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{10}}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

答： $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 2，若以點 C 為圓心並以 CB 為半徑所作的圓與以 AB 為直徑所作的圓交於點 E 與點 B，如下圖所示。試求線段 AE 之長。



【參考解法】

令O點為AB的中點。連接CO、BE，如圖所示。

此時可知$OB=1$，因此$OC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$。因$O$、$C$為兩圓的圓心而$BE$為這兩個圓的共同弦，故可知$OC\perp BE$ (5分)；因AB為圓O的直徑，故知$AE\perp BE$ (5分)，因此$AE//OC$，即有 $\angle EAB=\angle COB$ ，故$\triangle AEB\sim\triangle OBC$(5分)，故有 $\dfrac{AE}{OB}=\dfrac{AB}{OC}$ ，即 $AE=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$ (5分)。

答： $\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

2. 將 n 個不同的正整數 a_1 、 a_2 、⋯、 a_{n-1} 、 a_n 按順時針方向放在一個圓周上，若對於 1、2、3、...、10 這十個正整數中的任意一個數 b，均能找到一個正整數 i，使得 $a_i=b$ 或 $a_i+a_{i+1}=b$ ，並規定 $a_{n+1}=a_1$ ，試求正整數 n 的最小值。

【參考解法】

由題目條件知 a_1、a_2、…、a_{n-1}、a_n、a_1+a_2、a_2+a_3、…、a_n+a_1 這 $2n$ 個數應包含 1、2、3、...、10 這十個正整數，故 $2n\ge 10$，即 $n\ge 5$(5 分)。

當 $n=5$ 時，則 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_1+a_2、a_2+a_3、a_3+a_4、a_4+a_5、a_5+a_1 這十個數互不相等，且它們的值介於 1~10。故有

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+(a_4+a_5)+(a_5+a_1)\\&=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10\\&=55\end{aligned}$$

此即 $3(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=55$，但因 55 不為 3 的倍數，故不合(5 分)；

當 $n=6$ 時，可取 $a_1=1$、$a_2=10$、$a_3=2$、$a_4=6$、$a_5=3$、$a_6=4$(5 分)，則有 $a_6+a_1=5$、$a_5+a_6=7$、$a_3+a_4=8$、$a_4+a_5=9$，此滿足題意。

故知正整數 n 的最小值為 6。(5 分)

答：6

3. 現有 27 枚砝碼，重量分別為 1^2 克、2^2 克、...、27^2 克，將它們分成砝碼枚數相同且總重量相等的三堆，已知 1^2、11^2、21^2 與 25^2 克的砝碼在同一堆，請問同在這一堆的砝碼還有哪些？

【參考解法】

先觀察 n^2、$(n+1)^2=n^2+2n+1$、$(n+2)^2=n^2+4n+4$、$(n+3)^2=n^2+6n+9$、$(n+4)^2=n^2+8n+16$、$(n+5)^2=n^2+10n+25$、$(n+6)^2=n^2+12n+36$、$(n+7)^2=n^2+14n+49$、$(n+8)^2=n^2+16n+64$ 這九個砝碼。

可知這九個砝碼總重為 $9n^2+72n+204$ 克，若要將這 9 個砝碼平均分成三堆重量相等，則平均一堆重量為 $3n^2+24n+68$。但由 $(n+8)^2=n^2+16n+64$ 可判斷出無法完成此目標；再因實際上有 27 個砝碼，故可改考慮以下二種分法：

<分法 1>

若將 n^2、$(n+4)^2=n^2+8n+16$、$(n+8)^2=n^2+16n+64$ 這三個放在第 1 組，則第 1 組的重量為 $3n^2+24n+90$；

若將 $(n+2)^2=n^2+4n+4$、$(n+3)^2=n^2+6n+9$、$(n+7)^2=n^2+14n+49$ 這三個放在第 2 組，則第 2 組的重量為 $3n^2+24n+62$；

若將 $(n+1)^2=n^2+2n+1$、$(n+5)^2=n^2+10n+25$、$(n+6)^2=n^2+12n+36$ 這三個放在第 3 組，則第 3 組的重量為 $3n^2+24n+62$(5 分)。

此時可發現第 2 組與第 3 組的重量相等，而第 1 組的重量恰比這兩組各重了 18 克。故若將接下來的 9 個砝碼依此方式分成三組，使第 1、3 組的重量相等而第 2 組恰比它們各重 18 克，接著再將接下來的 9 個砝碼依此方式分成三組，使第 1、2 組的重量相等而第 3 組恰比它們各重 18 克。現把這樣操作三次所得的第 1 組全放在一起成為第 1 堆、第 2 組全放在一起成為第 2 堆、第 3 組全放在一起成為第 3 堆，則此時三堆的重量相等，即 27 個重量為連續平方數的砝碼可分成重量相等的三堆。因此分堆方式可為：

第 1 堆：1^2、5^2、9^2、12^2、13^2、17^2、20^2、24^2、25^2；
第 2 堆：3^2、4^2、8^2、11^2、15^2、16^2、19^2、23^2、27^2；
第 3 堆：2^2、6^2、7^2、10^2、14^2、18^2、21^2、22^2、26^2。
此時1^2、11^2、21^2克的砝碼不在同一堆；
而若將第二次操作與第三次操作的順序互換，可得另一種分堆方式：
第 1 堆：1^2、5^2、9^2、11^2、15^2、16^2、21^2、22^2、26^2；
第 2 堆：3^2、4^2、8^2、10^2、14^2、18^2、20^2、24^2、25^2；
第 3 堆：2^2、6^2、7^2、12^2、13^2、17^2、19^2、23^2、27^2。
此時1^2與25^2克的砝碼不在同一堆(5 分)。
<分法 2>
若將n^2、$(n+5)^2=n^2+10n+25$、$(n+7)^2=n^2+14n+49$這三個放在第 1 組，則第 1 組的重量為$3n^2+24n+74$；
若將$(n+1)^2=n^2+2n+1$、$(n+3)^2=n^2+6n+9$、$(n+8)^2=n^2+16n+64$這三個放在第 2 組，則第 2 組的重量為$3n^2+24n+74$；
若將$(n+2)^2=n^2+4n+4$、$(n+4)^2=n^2+8n+16$、$(n+6)^2=n^2+12n+36$這三個放在第 3 組，則第 3 組的重量為$3n^2+24n+56$(5 分)。
此時可發現第 1 組與第 2 組的重量相等，而第 3 組的重量恰比這兩組各輕了 18 克。故若將接下來的 9 個砝碼依此方式分成三組，使第 1、3 組的重量相等而第 2 組恰比它們各輕 18 克，接著再將接下來的 9 個砝碼依此方式分成三組，使第 2、3 組的重量相等而第 1 組恰比它們各輕 18 克。現把這樣操作三次所得的第 1 組全放在一起成為第 1 堆、第 2 組全放在一起成為第 2 堆、第 3 組全放在一起成為第 3 堆，則此時三堆的重量相等，即 27 個重量為連續平方數的砝碼可分成重量相等的三堆。因此分堆方式可為：
第 1 堆：1^2、6^2、8^2、12^2、14^2、16^2、20^2、22^2、27^2；
第 2 堆：2^2、4^2、9^2、10^2、15^2、17^2、21^2、23^2、25^2；
第 3 堆：3^2、5^2、7^2、11^2、13^2、18^2、19^2、24^2、26^2。
此時1^2、11^2、21^2克的砝碼不在同一堆；
而若將第二次操作與第三次操作的順序互換，可得另一種分堆方式：
第 1 堆：1^2、6^2、8^2、11^2、13^2、18^2、21^2、23^2、25^2；
第 2 堆：2^2、4^2、9^2、12^2、14^2、16^2、19^2、24^2、26^2；
第 3 堆：3^2、5^2、7^2、10^2、15^2、17^2、20^2、22^2、27^2。
故與1^2、11^2、21^2與25^2克的砝碼在同一堆的砝碼還有6^2、8^2、13^2、18^2、23^2克的砝碼。(5 分)
【評分標準】
本題答案不唯一。若僅利用計算找出與1^2、11^2、21^2與25^2克的砝碼同一堆的其餘砝碼總重量恰為 1122 克的砝碼而未驗證其他砝碼可分成總重量皆為 2310 克的兩堆，5 分；寫出完整三堆分法，20 分。

共有 46 組解，分別是
$[27^2,18^2,7^2,4^2,2^2]$, $[27^2,17^2,8^2,6^2,2^2]$, $[27^2,15^2,10^2,8^2,2^2]$, $[27^2,14^2,12^2,7^2,2^2]$,
$[27^2,14^2,10^2,9^2,4^2]$, $[27^2,13^2,12^2,8^2,4^2]$, $[26^2,18^2,9^2,5^2,4^2]$, $[26^2,18^2,8^2,7^2,3^2]$,
$[26^2,17^2,12^2,3^2,2^2]$, $[26^2,16^2,10^2,9^2,3^2]$, $[26^2,15^2,14^2,4^2,3^2]$, $[26^2,15^2,13^2,6^2,4^2]$,
$[26^2,14^2,12^2,9^2,5^2]$, $[24^2,22^2,7^2,3^2,2^2]$, $[24^2,20^2,9^2,7^2,4^2]$, $[24^2,19^2,12^2,5^2,4^2]$,
$[24^2,19^2,10^2,9^2,2^2]$, $[24^2,19^2,10^2,7^2,6^2]$, $[24^2,18^2,13^2,7^2,2^2]$, $[24^2,17^2,14^2,6^2,5^2]$,
$[24^2,17^2,12^2,8^2,7^2]$, $[24^2,16^2,15^2,7^2,4^2]$, $[24^2,15^2,14^2,10^2,5^2]$, $[24^2,14^2,13^2,10^2,9^2]$,
$[23^2,22^2,8^2,6^2,3^2]$, $[23^2,18^2,16^2,3^2,2^2]$, $[23^2,18^2,14^2,8^2,3^2]$, $[23^2,18^2,13^2,8^2,6^2]$,
$[23^2,18^2,12^2,10^2,5^2]$, $[22^2,20^2,15^2,3^2,2^2]$, $[22^2,19^2,15^2,6^2,4^2]$, $[22^2,18^2,17^2,4^2,3^2]$,
$[22^2,18^2,16^2,7^2,3^2]$, $[22^2,18^2,15^2,8^2,5^2]$, $[22^2,18^2,13^2,9^2,8^2]$, $[22^2,17^2,14^2,12^2,3^2]$,
$[22^2,17^2,13^2,12^2,6^2]$, $[22^2,15^2,13^2,12^2,10^2]$, $[20^2,19^2,15^2,10^2,6^2]$, $[20^2,18^2,17^2,10^2,3^2]$,
$[20^2,18^2,15^2,13^2,2^2]$, $[20^2,17^2,15^2,12^2,8^2]$, $[19^2,18^2,17^2,12^2,2^2]$, $[19^2,18^2,16^2,10^2,9^2]$,
$[19^2,18^2,15^2,14^2,4^2]$, $[18^2,17^2,14^2,13^2,12^2]$.